VARIANTA 5
MATEMATICA-INFORMATICA

SUBIECTUL III:
1.

a) Calculăm derivata funcţiei:
$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2}{x^2-1}$. Deoarece pentru $x > 1 \Rightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0$ şi $-2 < 0$ rezultă că $f'(x) < 0$ şi deci f este strict descrescătoare pe $(-1, \infty)$.

b) Calculăm:

- $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. Deoarece pentru $x \to 1 \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} \to \infty \Rightarrow \ln\frac{x+1}{x-1} \to \infty$ avem $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \ln\frac{x+1}{x-1} = \infty$ şi deci în 1 funcţia are ca asimptotă verticală dreapta de ecuaţie $x = 1$;
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\frac{x+1}{x-1} = \ln \lim\limits_{x\to\infty} l\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \ln \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \ln 1 = 0$. Rezultă că la ∞ funcţia f are ca asimptota orizontală dreapta $y = 0$

Deoarece funcţia este continuă pe intervalul $(-1, \infty)$ rezultă că funcţia f nu mai are alte asimptote.

c) Pentru a calcula limita dată trebuie să observăm că funcţia se poate transforma în aşa fel încât să avem o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$ pe care o putem calcula folosind regula lui l'Hospital:

$$\lim_{x\to\infty} xf(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} \overset{l''H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{x^2-1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2$$

2.

a) $$\int_1^4 f(\sqrt{x}) = \int_1^4 x - 3\sqrt{x} + 2dx = \left.\left(\frac{x^2}{2} - 3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2x\right)\right|_1^4 = \left.\left(\frac{x^2}{2} - 2x^{\frac{3}{2}} + 2x\right)\right|_1^4 = -\frac{1}{2}.$$

b) Pe intervalul $[1,2]$ avem $x > 0$ iar $f(x) < 0$ deoarece 1 şi 2 sunt rădacini ($f(1) = 0$ şi $f(2) = 0$) şi funcţia f (de gr. II) are semn contrar coeficientului lui x^2. Rezultă

$$A = \int_1^2 \left|\frac{f(x)}{x}\right| dx = -\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = -\int_1^2 \frac{x^2-3x+2}{x} dx = -\int_1^2 x - 3 + \frac{2}{x} dx = \left.\left(-\frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln x\right)\right|_1^2 = \frac{3}{2} - 2\ln 2$$

c) Ţinând cont de faptul că $f'(x) = \left(x^2 - 3x + 2\right)' = 2x - 3$ şi că $\left[f^n(x)\right]' = nf^{n-1}(x)f'(x) = nf^{n-1}(x)(2x-3)$ calculăm prin părţi integrala $I_1 = \int_1^2 f^n(x)dx = \frac{1}{2}\int_1^2 2f^n(x)dx$.

Pentru aceasta pregătim următoarele funcţii:

- $u'(x) = 2 \Rightarrow u(x) = 2x + c$ în care alegând $c = -3 \Rightarrow u(x) = 2x - 3$;
- $v(x) = f^n(x) \Rightarrow v'(x) = nf^{n-1}(x)(2x-3)$;

Înlocuind şi efectuând calculele obţinem:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_1^2 (2x-3)' f^n(x)dx = \frac{1}{2}\left[(2x-3)f^n(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 (2x-3)nf^{n-1}(x)(2x-3)dx\right].$$

Deoarece $f(1) = 0$ şi $f(2) = 0$ primul termen este egal cu zero. Rezultă $I_1 = -\frac{n}{2}\int_1^2 (2x-3)^2 f^{n-1}(x)dx = -\frac{n}{2}\int_1^2 \left(4x^2 - 12x + 9\right)f^{n-1}(x)dx$. În continuare vom descompune trinomul astfel încât să punem în evidenţă expresia funcţiei f :

$$I_1 = -\frac{n}{2}\int_1^2 \left(4x^2 - 12x + 8 + 1\right)f^{n-1}(x)dx = -\frac{n}{2}\int_1^2 [4(x^2 - 3x + 2) + 1]f^{n-1}(x)dx - \frac{n}{2}\int_1^2 4f^n(x) + f^{n-1}(x)dx$$

Folosind proprietatea de aditivitate a integralei obţinem:

$$I_1 = -\frac{4n}{2}\int_1^2 f^n(x)dx - \frac{n}{2}\int_1^2 f^{n-1}(x)dx \Rightarrow \int_1^2 f^n(x)dx = -\frac{4n}{2}\int_1^2 f^n(x) - \frac{n}{2}\int_1^2 f^{n-1}(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\int_1^2 f^n(x)dx = -4n\int_1^2 f^n(x) - n\int_1^2 f^{n-1}(x)dx \Rightarrow (4n+2)\int_1^2 f^n(x)dx + n\int_1^2 f^{n-1}(x)dx = 0$$

c.c.t.d..