

VARIANTA 5
MATEMATICA-INFORMATICA

SUBIECTUL II:

1. a. După efectuarea calculelor în membrul stâng și transformarea membrului drept, obținem aceleași expresii și deci membrul stâng este egal cu membrul drept pentru orice valori reale x și y .

$$\text{Calculăm: } m_s = A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y & y^2 \\ 0 & 1 & 2y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y & x^2+2xy+y^2 \\ 0 & 1 & 2x+2y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y & (x+y)^2 \\ 0 & 1 & 2(x+y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$m_d = A(x+y) = \begin{pmatrix} 1 & x+y & (x+y)^2 \\ 0 & 1 & 2(x+y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2);$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă că relația $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$ este adevărată pentru orice valori reale x și y .

b. Din $A(x) - A(y) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & y & y^2 \\ 0 & 1 & 2y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x-y & x^2-y^2 \\ 0 & 0 & 2(x-y) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ calculăm

$$\begin{pmatrix} 0 & x-y & x^2-y^2 \\ 0 & 0 & 2(x-y) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x-y & x^2-y^2 \\ 0 & 0 & 2(x-y) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & x-y & x^2-y^2 \\ 0 & 0 & 2(x-y) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2(x-y)^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ și apoi}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2(x-y)^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & x-y & x^2-y^2 \\ 0 & 0 & 2(x-y) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3.$$

Pentru orice $n > 3$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2(x-y)^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n = O_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2(x-y)^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} = O_3$.

Rezultă că $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2(x-y)^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2011} = O_3$ pentru orice x și y reali.

- c. Calculăm determinantul matricei $A(x)$:

$$\det A(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \text{ Rezultă că matricea este inversabilă.}$$

Scriem matricea transpusă: $(A(x))^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix}$, apoi calculăm complementul algebric al

fiecărui element pentru a putea scrie matricea adjuncată (reciprocă).

Complementii algebrici:

$$\delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \delta_{12} = -\begin{vmatrix} x & 0 \\ x^2 & 1 \end{vmatrix} = -x, \quad \delta_{13} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ x^2 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2$$

$$\delta_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x^2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \delta_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x^2 & 2x \end{vmatrix} = -2x, \quad \delta_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\delta_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \delta_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Matricea adjunctă (reciprocă):

$$(A(x))^* = \begin{pmatrix} 1 & -x & x^2 \\ 0 & 1 & -2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezultă $(A(x))^{-1} = \frac{1}{\det A(x)} \cdot (A(x))^* = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -x & x^2 \\ 0 & 1 & -2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -x & x^2 \\ 0 & 1 & -2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.

a. Calculăm:

$f(-1) = (-1)^3 + (1-\alpha)(-1)^2 + (\alpha-2)i(-1) + \alpha + (\alpha-2)i = -1 + 1 - \alpha - \alpha i + 2i + \alpha + \alpha i - 2i = 0$ Din $f(-1)=0$ rezultă că -1 este rădăcină a polinomului f.

b. Deoarece rădăcinile sunt complex conjugate ele sunt de forma $x_1 = u + vi$ respectiv $x_2 = u - vi$, unde $u, v \in \mathfrak{R}$.

Din relațiile lui Viète $x_1 + x_2 = -p$ și $x_1 x_2 = q$ prin înlocuire obținem:

- $x_1 + x_2 = -p \Leftrightarrow u + vi + u - vi = -p \Leftrightarrow 2u = -p \Leftrightarrow p = -2u$ și cum $u \in \mathfrak{R}$ rezultă că $p \in \mathfrak{R}$;
- $x_1 x_2 = q \Leftrightarrow (u + vi)(u - vi) = q \Leftrightarrow u^2 + v^2 = q$ dar $u, v \in \mathfrak{R}$ deci și suma pătratelor lor este număr real adică $q \in \mathfrak{R}$;
- Polinomul g (de gradul II) are coeficienții reali și are rădăcini complex conjugate dacă și numai dacă $\Delta < 0$.

Calculăm $\Delta = b^2 - 4ac = p^2 - 4q$ și prin înlocuire avem:

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow p^2 - 4q < 0 \Leftrightarrow p^2 < 4q.$$

c. Deoarece -1 este rădăcină pentru f rezultă că f este divizibil cu binomul $X + 1$ și prin urmare există următoarea descompunere: $f = (X + 1) \cdot h$.

Prin urmare avem

$$f = X^3 + X^2 - \alpha X^2 + \alpha i X - 2i X + \alpha + \alpha i - 2i = X^2(X + 1) - \alpha(X^2 - 1) + \alpha i(X + 1) - 2i(X + 1)$$

După ce se dă factor comun $X + 1$ obținem: $f = (X + 1)[X^2 - \alpha X + \alpha + (\alpha - 2)i] = (X + 1) \cdot h$.

Polinomul h este de forma polinomului g de la punctul anterior deci pentru a avea două rădăcini complex conjugate trebuie să aibă coeficienții reali.

Rezultă $\alpha \in \mathfrak{R}$ și $[\alpha + (\alpha - 2)i] \in \mathfrak{R}$. De aici rezultă $(\alpha - 2)i \in \mathfrak{R}$ și prin urmare $\alpha - 2 = 0$, deci $\alpha = 2$.

Pentru $f = (X + 1)(X^2 - 2X + 2)$, rădăcinile sunt : $x_1 = -1$, $x_2 = 1 + i$, $x_3 = 1 - i$.
Deci f are două rădăcini complex conjugate pentru $\alpha = 2$.