

VARIANTA 5
MATEMATICA-INFORMATICA

SUBIECTUL I:

1. Deoarece $1 < \sqrt{2} < 2$ și $2 < \sqrt{5} < 3$ rezultă $1 < \sqrt{2} < 2 < \sqrt{5} < 3$, deci între $\sqrt{2}$ și $\sqrt{5}$ nu există decât numărul întreg 2. Rezultă $(\sqrt{2}, \sqrt{5}) \cap \mathbb{Z} = \{2\}$.

2. Axa de simetrie a parabolei este dreapta care trece prin vârful parabolei și este paralelă cu axa Oy .

Abscisa vârfului parabolei este $x_v = -\frac{b}{2a}$, unde cu coeficienții $a=1$ și $b=m$ obținem $x_v = -\frac{m}{2}$.

Punem condiția $x_v = 2$, de unde rezultă ecuația $-\frac{m}{2} = 2$, înmulțim cu 2, rezultă $-m = 4$ și de aici prin împărțire cu (-1) obținem $m = -4$.

3. Ecuația trigonometrică $\sin x = a$ are soluțiile date de formula $x = k\pi - (-1)^k \arcsin a$, unde $k \in \mathbb{Z}$.

Folosind relația de mai sus pentru ecuația dată, obținem $x - \frac{\pi}{6} = k\pi + (-1)^k \arcsin \frac{1}{2}$, din care

rezultă $x_k = k\pi + (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}$.

Tinând cont că mulțimea în care rezolvăm ecuația este $[0, 2\pi)$ și $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, obținem numai

pentru $k=0, k=1$ valorile $x_0 = 0 \cdot \pi + (-1)^0 \arcsin \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} = 0 + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ și respective

$x_1 = 1 \cdot \pi + (-1)^1 \arcsin \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \pi$ care sunt în intervalul $[0, 2\pi)$.

Rezultă $x \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \pi \right\}$.

4. Folosind formulele $A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ și $C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$ pentru $k=2$

obținem $A_n^2 = n(n-1)$ și $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Prin înlocuire în ecuația dată obținem:

$$\frac{n(n-1)}{2} + n(n-1) = 18 \Leftrightarrow n(n-1) + 2n(n-1) = 36 \Leftrightarrow 3n(n-1) = 36 \Leftrightarrow n(n-1) = 12.$$

Deoarece n este număr natural și singurele numere naturale consecutive pentru care produsul este 12, sunt 3 și 4 rezultă direct că $n=4$. Se obține același rezultat dacă se efectuează înmulțirea și după ce se rezolvă ecuația de gradul II, obținută și punem condiția $n \in \mathbb{N}$.

5. Condiția de paralelism pentru două drepte este a ca rapoartele coeficienților lui x respective y să fie egale.

Prin urmare punem condiția: $\frac{a}{1} = \frac{1}{-2} \Leftrightarrow -2a = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

6. Ținând cont de formulele $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ și $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ pe care le înlocuim în membrul stâng al

egalității date și de formula $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ obținem:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = 2 \Leftrightarrow 1 = 2 \sin x \cos x \Leftrightarrow 1 = \sin 2x. \text{ Adică } \sin 2x = 1$$